23 stycznia 2017

Politechnika Wrocławska

Ruletka – czy można oszukać kasyno?

M. Dworak, K. Maraj, S. Michałowski

Plan prezentacji

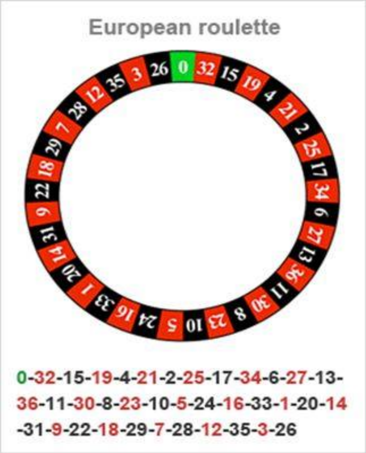
- Podstawy ruletki
- System dwójkowy (Martingale)
- Czy system rzeczywiście działa?

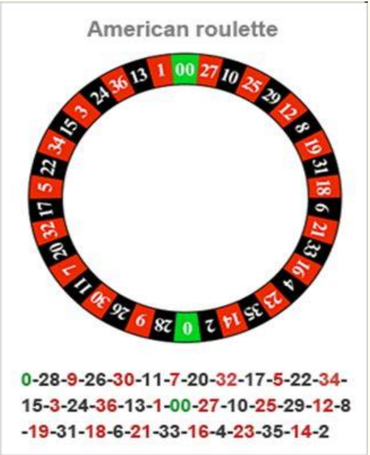
Podstawy ruletki

Zasady gry

1. Gracze przy stole wnoszą swoje zakłady.
2. Krupier upuszcza kulkę na koło ruletki tak, aby przemieszczała się w przeciwnym kierunku do wirującego koła.
3. Gdy kulka zatrzyma się na którymś z pól, krupier sprawdza, kto wygrał.
4. Zwycięzcy odbierają nagrody zgodne z tabelą wypłat.

Układ na kole





Prawdopodobieństwo wygrania zakładu

p - ilość obstawionych pól
n - ilość pól z zerami

Szansa trafienia:

$$\frac{p}{(36+n)}$$

Obliczanie kursu kasyna:

$$\frac{36}{p}$$

Średni zwrot zakładu:

$$\frac{p}{(36+n)} \cdot \frac{36}{p} = \frac{36}{(36+n)}$$

Tabela

Zakład	Przykład	Kurs kasyna	Prawdopodobieństwo		Różnica
			Europejska	Amerykańska	
Dowolna liczba	7	35:1	2,70%	2,63%	0,07%
2 liczby	8 18	17:1	5,40%	5,26%	0,14%
3 liczby	13 18 20	11:1	8,10%	7,89%	0,21%
4 liczby	1 5 7 10	8:1	10,80%	10,53%	0,27%
5 liczb	tylko 00 0 1 2 3	6:1	-	13,16%	-
6 liczb	25 do 30	5:1	16,20%	15,79%	0,41%
Kolumna	1 4 7…31 34	2:1	32,40%	31,58%	0,82%
Dwunastka	1 do 12	2:1	32,40%	31,58%	0,82%
Parzyste/Nieparzyste	2 4 6…34 36	1:1	48,60%	47,37%	1,23%
1-18/19-36	1 do 18	1:1	48,60%	47,37%	1,23%
Czarne/Czerwone	Czarne	1:1	48,60%	47,37%	1,23%

System dwójkowy (Martingale)

Zasada działania systemu dwójkowego

System dwójkowy polega na podwajaniu postawionej stawki aż do momentu wygranej. Używa się go do obstawiania pól czarnych lub czerwonych. Przykład:

- Stawiamy 1 zł na **czarne**,

Zasada działania systemu dwójkowego

System dwójkowy polega na podwajaniu postawionej stawki aż do momentu wygranej. Używa się go do obstawiania pól czarnych lub czerwonych. Przykład:

- Stawiamy 1 zł na **czarne**,
- wypada czerwone (przegrywamy) i stawiamy 2 zł,

Zasada działania systemu dwójkowego

System dwójkowy polega na podwajaniu postawionej stawki aż do momentu wygranej. Używa się go do obstawiania pól czarnych lub czerwonych. Przykład:

- Stawiamy 1 zł na **czarne**,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 2 zł,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 4 zł,

Zasada działania systemu dwójkowego

System dwójkowy polega na podwajaniu postawionej stawki aż do momentu wygranej. Używa się go do obstawiania pól czarnych lub czerwonych. Przykład:

- Stawiamy 1 zł na **czarne**,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 2 zł,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 4 zł,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 8 zł,

Zasada działania systemu dwójkowego

System dwójkowy polega na podwajaniu postawionej stawki aż do momentu wygranej. Używa się go do obstawiania pól czarnych lub czerwonych. Przykład:

- Stawiamy 1 zł na **czarne**,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 2 zł,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 4 zł,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 8 zł,
- wypada **czarne**, wygrywamy $2 \cdot 8 = 16$ zł,

Zasada działania systemu dwójkowego

System dwójkowy polega na podwajaniu postawionej stawki aż do momentu wygranej. Używa się go do obstawiania pól czarnych lub czerwonych. Przykład:

- Stawiamy 1 zł na **czarne**,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 2 zł,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 4 zł,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 8 zł,
- wypada **czarne**, wygrywamy $2 \cdot 8 = 16$ zł,
- wydaliśmy $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ zł, więc wygraliśmy 1 zł.

Zasada działania systemu dwójkowego

System dwójkowy polega na podwajaniu postawionej stawki aż do momentu wygranej. Używa się go do obstawiania pól czarnych lub czerwonych. Przykład:

- Stawiamy 1 zł na **czarne**,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 2 zł,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 4 zł,
- wypada **czerwone** (przegrywamy) i stawiamy 8 zł,
- wypada **czarne**, wygrywamy $2 \cdot 8 = 16$ zł,
- wydaliśmy $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ zł, więc wygraliśmy 1 zł.
- Oczywiście, możemy stosować te zasady jedynie wtedy, gdy dysponujemy wystarczającym kapitałem do obstawiania kolejnych zakładów.

Wygrana przy nieskończonym kapitale początkowym

Pokażemy teraz, że gdy dysponujemy nieskończonym kapitałem to końcowa wygrana zawsze jest taka sama jak wielkość pierwszego zakładu. Niech Y będzie czasem oczekiwania na pierwszy sukces, a k wielkością pierwszego zakładu. Wtedy wygrana W wyraża się wzorem:

$$W = -(k \cdot 2^0 + k \cdot 2^1 + \cdots + k \cdot 2^{Y-1}) + 2 \cdot k \cdot 2^{Y-1}$$

$$W = k \cdot 2^Y - \sum_{l=0}^{Y-1} k \cdot 2^l = k \cdot 2^Y - \sum_{l=1}^{Y} k \cdot 2^{l-1} = k \cdot 2^Y - k\frac{1-2^Y}{1-2} =$$

$$= k \cdot 2^Y + k \cdot (1 - 2^Y) = k \cdot 2^Y - k \cdot 2^Y + k = k.$$

Czy system rzeczywiście działa?

"Nie ma innej możliwości wygrania w ruletkę, niż zgarnąć ze stołu pieniądze, gdy krupier się zagapi."

Albert Einstein

Ile razy możemy przegrać z kapitałem początkowym K?

Załóżmy teraz, że dysponujemy pewnym skończonym kapitałem początkowym K. Ile zakładów z rzędu możemy przegrać zanim skończą się nam pieniądze, gdy k to wielkość pierwszego zakładu? Szukamy takiego n, że:

$$\left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}\right) k \leqslant K \quad \wedge \quad \left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n\right) k > K$$

$$k \cdot \frac{1-2^n}{1-2} \leqslant K < k \cdot \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$$

$$2^n - 1 \leqslant \frac{K}{k} < 2^{n+1} - 1$$

$$2^n \leqslant \frac{K}{k} + 1 < 2^{n+1}$$

$$n \leqslant \log_2\left(\frac{K}{k}+1\right) < n+1 \Rightarrow n = \left\lfloor \log_2\left(\frac{K}{k}+1\right)\right\rfloor.$$

Ile razy możemy przegrać zaczynając z kapitałem K?

Przykładowo gdy zaczynamy mając $K = 1023$ zł, a nasz pierwszy zakład wynosi $k = 1$ zł, przegranie 10 zakładów z rzędu kończy grę.

$$n = \left\lfloor \log_2 \left(\frac{1023}{1} + 1 \right) \right\rfloor = 10$$

Sprawdzenie:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 254 + 512 = 1023.$$

Czyli po 10 przegranych zakładach z rzędu suma wydanych pieniędzy jest równa 1023 zł, czyli zostało nam 0 zł i nie możemy kontynuować gry.

Wynik serii zakładów do pierwszej wygranej lub ruiny gracza

Jeżeli za grę uznajemy serię zakładów w systemie dwójkowym, która kończy się gdy wygramy k zł albo przegramy tyle pieniędzy, że nie stać nas na kolejny zakład, to dla $n_K = \left\lfloor \log_2 \left(\frac{K}{k} + 1 \right) \right\rfloor$ wynik gry W_K wynosi

$$W_K = \begin{cases} k, & \text{gdy } Y < n_K, \\ -k\left(2^{n_k} - 1\right), & \text{gdy } Y \geqslant n_K, \end{cases}$$

a stan finansów po grze

$$F_K = \begin{cases} K + k, & \text{gdy } Y < n_K, \\ K - k\left(2^{n_K} - 1\right), & \text{gdy } Y \geqslant n_K. \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo ruiny gracza w serii zakładów do pierwszej wygranej lub ruiny gracza

Obliczmy teraz jakie jest prawdopodobieństwo, że gra skończy się na minusie, tzn. przegramy n_K zakładów z rzędu.

$$P(W \leqslant 0) = P(Y \geqslant n_K) = \left(\frac{19}{37}\right)^{n_K} = \left(\frac{19}{37}\right)^{\left\lfloor \log_2\left(\frac{K}{k}+1\right)\right\rfloor}$$

W szczególności dla $K = 1023, k = 1$ mamy

$$P(W \leqslant 0) = \left(\frac{19}{37}\right)^{10} \approx 0.001275$$

Jak widzimy szansa na przegraną jest znikoma, jednak jeśli tak się stanie, to przegramy wszystkie pieniądze.

Kapitał, dla którego moment ruiny będzie o jeden zakład późniejszy niż dla K

Rozważmy tylko kapitały początkowe postaci $K = 2^j - 1, j \in N$, oraz $k = 1$ zł. Przy takich założeniach przegranie gry skutkuje tym, że zostaje nam 0zł. Znajdźmy taki kapitał początkowy K_1, że $n_{K_1} = n_K + 1$.

Kapitał, dla którego moment ruiny będzie o jeden zakład późniejszy niż dla K

Rozważmy tylko kapitały początkowe postaci $K = 2^j - 1, j \in N$, oraz $k = 1$ zł. Przy takich założeniach przegranie gry skutkuje tym, że zostaje nam 0zł. Znajdźmy taki kapitał początkowy K_1, że $n_{K_1} = n_K + 1$.

$$\log_2\left(\frac{K_1}{k} + 1\right) = n_K + 1$$
$$\frac{K_1}{k} + 1 = 2^{n_K+1}$$
$$K_1 = \left(2^{n_K+1} - 1\right) k$$
$$K_1 = 2^{n_K+1} - 1.$$

Osiągnięcie kapitału, dla którego moment ruiny będzie o jeden zakład późniejszy niż dla K

Obliczmy teraz, ile gier musimy wygrać, aby nasz kapitał K powiększył się do kapitału K_1. Przyjmujemy, że po wygranej grze całą wygraną odkładamy na bok i operujemy w kolejnej grze tylko kapitałem początkowym K. Pieniądze z wygranych nie biorą udziału w kolejnych grach, dopóki nie osiągniemy kapitału K_1. Jeśli przegramy grę przed osiągnięciem kapitału K_1, kończymy obstawianie.

Osiągnięcie kapitału, dla którego moment ruiny będzie o jeden zakład późniejszy niż dla K

Obliczmy teraz, ile gier musimy wygrać, aby nasz kapitał K powiększył się do kapitału K_1. Przyjmujemy, że po wygranej grze całą wygraną odkładamy na bok i operujemy w kolejnej grze tylko kapitałem początkowym K. Pieniądze z wygranych nie biorą udziału w kolejnych grach, dopóki nie osiągniemy kapitału K_1. Jeśli przegramy grę przed osiągnięciem kapitału K_1, kończymy obstawianie.

$$N_K = (K_1 - K)\frac{1}{k}$$

$$N_K = \left(\left(2^{n_K+1} - 1\right) - (2^{n_K} - 1)\right)\frac{1}{k}$$

$$N_K = 2^{n_K+1} - 2^{n_K}$$

$$N_K = 2^{n_K}.$$

Prawdopodobieństwo osiągnięcia kapitału K_1

- Model: schemat Bernoulliego, sukces - przegranie n_K zakładów z rzędu, $p = \left(\frac{19}{37}\right)^{n_K}$.
- W 2^{n_K} grach nie przegramy n_K zakładów z rzędu, czyli będzie 0 sukcesów w 2^{n_K} próbach. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia to

$$\binom{2^{n_K}}{0}\left(\left(\frac{19}{37}\right)^{n_K}\right)^0\left(1-\left(\frac{19}{37}\right)^{n_K}\right)^{2^{n_K}} =$$

$$= \left(1-\left(\frac{19}{37}\right)^{n_K}\right)^{2^{n_K}}, \qquad \text{gdzie } n_K = \left\lfloor \log_2\left(\frac{K}{k}+1\right)\right\rfloor.$$

Prawdopodobieństwo osiągnięcia kapitału K_1 dla $K = 2^j - 1$ i $k = 1$

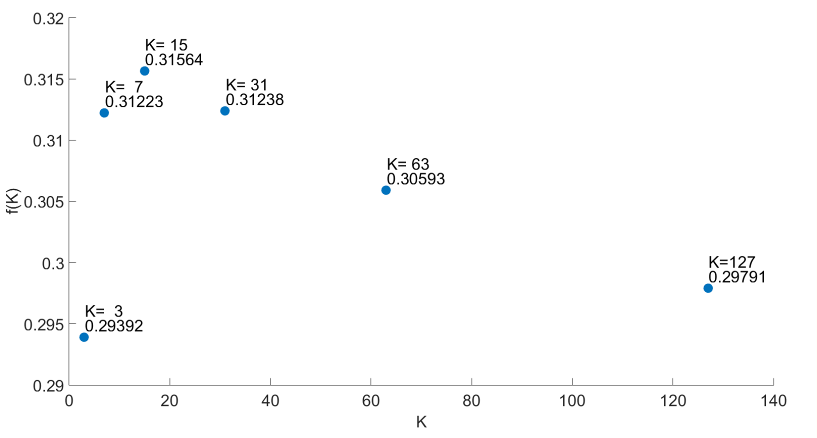
Rozważamy tutaj przypadek, że nasz kapitał jest postaci $K = 2^j - 1$ dla pewnego $j \in N$, oraz $k = 1$ zł. W takim przypadku n_K upraszcza się do postaci

$$n_K = \left\lfloor \log_2 \left(\frac{2^j - 1}{k} + 1 \right) \right\rfloor = \lfloor \log_2 2^j \rfloor = j.$$

Wstawiając do wzoru z poprzedniego slajdu dostajemy prawdopodobieństwo osiągnięcia kapitału K_1 jako funkcję K:

$$P(X = 0) = f(K) = \left(1 - \left(\frac{19}{37} \right)^j \right)^{2^j}, dla \quad K = 2^j - 1.$$

W taki sposób funkcja $f(K)$ przedstawia się na wykresie



Wnioski

Jak widzimy prawdopodobieństwo powiększenia kapitału K do kapitału K_1 jest niewielkie. Największe jest dla $K = 15$ i wynosi 0.31564. Co ciekawe, dla K dążącego do nieskończoności, $f(K)$ zbiega do zera. Czyli im większy mamy kapitał początkowy tym mniejsze prawdopodobieństwo osiągnięcia pożądanego przez nas kapitału K_1. Dochodzimy więc do wniosku, że Albert Einstein miał rację, nie ma skutecznego sposobu na wygranie w ruletkę.

Dziękujemy za uwagę.